

Statistische Physik

Präsenzübung, Blatt 3

WiSe 2018/19

1.11.2018

[P7] Zweizustandssystem

Gegeben sei ein System mit zwei Zuständen. Einer der Zustände habe Energie 0, der andere Energie ϵ . Das System befinde sich in thermischem Kontakt mit einem großen Reservoir der Temperatur τ . Drücken Sie die freie Energie F , den Erwartungswert der Energie U und die Entropie σ des Systems als Funktion von τ aus.

[P8] Energiefluktuation

Betrachten Sie ein System, das sich in thermischem Kontakt mit einem großen Reservoir der Temperatur τ befindet. Sei ϵ der Energieeigenwert des Systems, und sei $U = \langle \epsilon \rangle$ der Mittelwert der Energie. Zeigen Sie, dass

$$\langle (\epsilon - \langle \epsilon \rangle)^2 \rangle = \tau^2 C, \quad (1)$$

wobei

$$C = \frac{dU}{d\tau} \quad (2)$$

die Wärmekapazität des Systems ist.

[P9] Zustandssumme für unabhängige Systeme

- (a) Zeigen Sie für $x, y \in \mathbb{R}$, dass $e^{x+y} = e^x e^y$ gilt. Benutzen Sie dazu die Reihenentwicklung

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n. \quad (3)$$

Hinweis: Benutzen Sie die Relation

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k, \quad \text{mit} \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \quad (4)$$

- (b) Seien A und B Matrizen. Zeigen Sie, dass gilt

$$\text{tr}(A \otimes B) = \text{tr} A \text{tr} B. \quad (5)$$

- (c) Für ein Quantensystem mit Hamiltonoperator H bei Temperatur τ ist die Zustandssumme $Z = \text{tr} e^{-H/\tau}$. Betrachten Sie zwei unabhängige Quantensysteme mit Hamiltonoperatoren H_1 und H_2 , so dass der Hamiltonoperator des Gesamtsystems $H = H_1 \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes H_2$ ist. Die Zustandssummen der Einzelsysteme seien Z_1 und Z_2 . Zeigen Sie, dass für die Zustandssumme Z des Gesamtsystems gilt

$$Z = Z_1 Z_2. \quad (6)$$

Hinweis: Verallgemeinern Sie (a) auf geeignete Weise und verwenden Sie (b).